Andrzej Kostecki
Instytut Nafty i Gazu, Kraków

Algorytm migracji MG(F-K) dla anizotropowego ośrodka typu HTI (*Horizontal Transversely Isotropy*)

Wstęp

Anizotropowy model HTI jest obiektem, który uzyskuje się z obrotu modelu VTI (*Vertical Transversely Isotropy*) – czyli ośrodka o płasko-równoległej laminacji o kąt 90°, (rysunek 1). Wówczas warstwowany ośrodek zajmuje pozycję pionową, a oś symetrii pokrywa się z poziomą osią x. Tego rodzaju obiekt może również imitować system pionowych szczelin i tym samym wyznaczać kierunki anomalnych naprężeń w ośrodku skalnym.

Kombinacja pionowych (HTI) i monoklinalnych (TTI – *Tilted Transversely Isotropy*) modeli [7] stanowi złożony układ spękań i szczelin azymutalnie anizotropowego modelu, którego znajomość jest wielce przydatnym elementem w ocenie możliwości prospekcji naftowej.

Algorytm zostanie przedstawiony w dziedzinie częstotliwości (F) i liczb falowych (K), i będzie kolejną wersja algorytmiczną w ośrodku anizotropowym migracji MG(F-K) [4, 5].

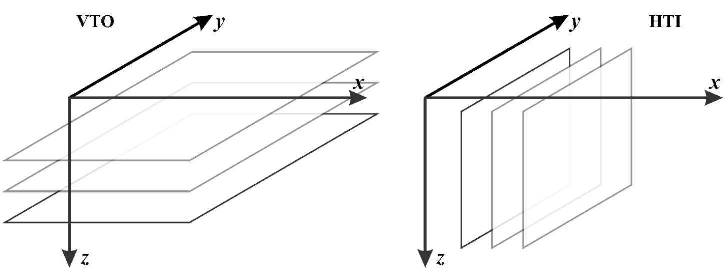
Zasadniczym elementem rozwiązania algorytmicznego będzie pionowa liczba falowa k_z – określona ze związku dyspersyjnego i przedstawiona w postaci przydatnej w procesie głębokościowej ekstrapolacji pola falowego.

Podstawowe równania

Rozważmy propagację pola falowego wzbudzonego i zarejestrowanego w ośrodku dwuwymiarowym (2D) w płaszczyźnie x-z (rysunek 1).

Pomiar dokonywany jest wzdłuż osi symetrii x, prostopadłej do laminacji ośrodka. Po lewej stronie rysunku zamieszczono dla porównania szkic ośrodka typu VTI.

W ośrodku dwuwymiarowym pochodne składowych pola falowego względem osi y są równe zeru, a ponadto korzystając z możliwości rozdzielenia fal poprzecznych SH od fal typu P (podłużne) i fal SV (poprzeczne, o polaryzacji w płaszczyźnie x-z) będziemy analizować jedynie składowe przemieszczeń U_x i U_z – uważając, że $U_y = 0$, ponieważ składowa ta jest niezależna od U_x i U_z.



Rys. 1. Model HTI

Wychodząc z ogólnego prawa ruchu (z pominięciem siły zewnętrznej)

$$T_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

gdzie T_{ij} jest tensorem naprężenia, U_i oznacza i-tą składową przemieszczenia, a ρ jest gęstością ośrodka, i stosując prawo Hooka – podstawowy związek pomiędzy tensorem naprężenia T_{ij} i tensorem deformacji E_{ij}

$$T_{ij} = d_{ijkl} E_{kl} = d_{ijkl} E_{lk} \tag{2}$$

gdzie d_{ijkl} jest 4 rzędu tensorem modułów sprężystości, oraz związek tensora odkształcenia E_{lk} ze składowymi przemieszczenia U_l

$$E_{lk} = \frac{1}{2}\left(U_{l,k} + U_{k,l}\right) \tag{3}$$

uzyskujemy w zapisie macierzowym związek:

$$\begin{vmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} = T_{32} \\ T_{13} = T_{31} \\ T_{12} = T_{21} \end{vmatrix} = D^{90^o,90^o} \begin{vmatrix} U_{1,1} = U_{x,x} \\ 0 \\ U_{3,3} = U_{z,z} \\ 0 \\ 2E_{31} = U_{z,x} + U_{x,z} \\ 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Macierz $D^{90^o, 90^o}$ jest symetryczną (6 × 6) macierzą modułów sprężystości, skonstruowaną poprzez rotację układu współrzędnych względem osi z ośrodka poprzecznie izotropowego (TI) o kąt φ oraz o kąt upadu θ. W rozpatrywanym przypadku kąt $\varphi = 90^o$, a kąt upadu θ również wynosi 90^o. Składowe tensora d_{ijkl} (w skróconym zapisie Voigta) przedstawiają się następująco [4, 9]:

$d_{11} = C_{33}$; $d_{12} = C_{13}$; $d_{13} = C_{13}$; $d_{14} = d_{15} = d_{16} = 0$
$d_{21} = C_{13}$; $d_{22} = C_{11}$; $d_{23} = C_{12}$; $d_{24} = d_{25} = d_{26} = 0$
$d_{31} = C_{13}$; $d_{32} = C_{12}$; $d_{33} = C_{11}$; $d_{34} = d_{35} = d_{36} = 0$
$d_{44} = C_{66}$; $d_{55} = C_{44}$; $d_{66} = C_{44}$,

tak więc macierz $D^{90^o, 90^o}$ ma postać:

$$D^{90^o,90^o} = \begin{vmatrix} C_{33} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix} \tag{5}$$

gdzie elementy macierzy C_{ij} stanowią składowe tensora modułów sprężystości właściwych ośrodkowi VTI (*Vertical Transversely Isotropy*).

Stosując relację (2) i posiłkując się związkami (4)-(5), mamy następujące wyrażenia pochodnych naprężeń dla przemieszczeń cząstek ośrodka w kierunku x (U_1) i z (U_3):

$$T_{11,1} + T_{13,3} = \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \tag{6a}$$

$$T_{31,1} + T_{33,3} = \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \tag{6b}$$

Posługując się równaniami (4)-(5) w odniesieniu do równań (6a) i (6b), otrzymujemy następujące relacje:

$$C_{33}U_{x,xx} + C_{44}U_{x,zz} + \left(C_{13} + C_{44}\right)U_{z,zx} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \tag{7a}$$

$$\left(C_{44} + C_{13}\right)U_{x,zx} + C_{44}U_{z,xx} + C_{11}U_{z,zz} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \tag{7b}$$

Po zastosowaniu transformacji Fouriera ($x \to k_x$, $z \to k_z$, $t \to \omega$) uzyskujemy równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} C_{33}k_x^2 + C_{44}k_z^2 - \rho\omega^2 & \left(C_{13} + C_{44}\right)k_x k_z \\ \left(C_{13} + C_{44}\right)k_x k_z & C_{11}k_z^2 + C_{44}k_x^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} U_x \\ U_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

gdzie k_x i k_z są liczbami falowymi (odpowiednio poziomą i pionową), a ω jest częstością. Z równania (8) uzyskuje się relację dyspersyjną:

$$b_{0H}k_z^4 + b_{1H}k_z^2 + b_{2H} = 0 \tag{9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_{0H} &= C_{11}C_{44} \\ b_{1H} &= k_x^2\left(C_{33}C_{11} - C_{13}^2 - 2C_{13}C_{44}\right) - \left(C_{11} + C_{44}\right)\rho\omega^2 \\ b_{2H} &= k_x^4 C_{33}C_{44} - \left(C_{33} + C_{44}\right)k_x^2\rho\omega^2 + \rho^2\omega^4 \end{aligned} \tag{10}$$

Jeżeli pominąć nieznaczny udział fal poprzecznych typu qSV w pionowej liczbie falowej oraz przyjmując, że $C_{44} = 0$, wtedy:

$$k_z^2 = -\frac{b_{2H}}{b_{1H}} = \frac{\rho^2\omega^4 - C_{33}k_x^2\rho\omega^2}{\rho\omega^2 C_{11} - \left(C_{33}C_{11} - C_{13}^2\right)k_x^2} \tag{11}$$

Posługując się parametrami Thomsena [8]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \\ \delta &= \frac{\left(C_{13} + C_{44}\right)^2 - \left(C_{33} - C_{44}\right)^2}{2C_{33}\left(C_{33} - C_{44}\right)} \end{aligned} \tag{12}$$

mamy

$$\frac{C_{13}^2}{C_{33}^2} = 1 + 2\delta \tag{13}$$

$$\frac{C_{11}}{C_{33}} = 1 + 2\varepsilon = q \tag{14}$$

a uwzględniając, że prędkość fali podłużnej $V_{pH} = \left(\frac{C_{33}}{\rho}\right)^{1/2}$ – otrzymujemy pionową liczbę falową w postaci:

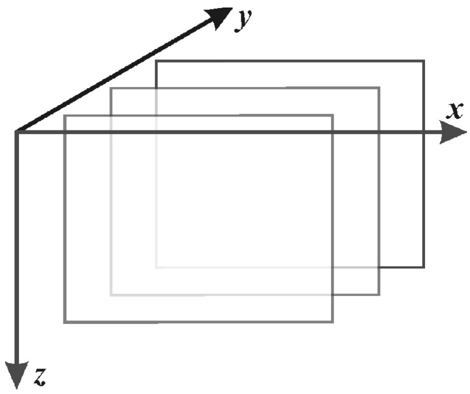
$$k_z = \left(\frac{S_H^4\omega^4 - S_H^2\omega^2 k_x^2}{S_H^2\omega^2 q - \eta k_x^2}\right)^{1/2} \tag{15}$$

W relacji (15) przez S_H oznaczono powolność w kierunku prostopadłym do laminacji, tj. $S_H = \frac{1}{V_{pH}}$, natomiast

$$\eta = 2(\varepsilon - \delta) \tag{16}$$

Rezultat (15) nietrudno zweryfikować, posiłkując się relacją dyspersyjną dla modelu VTI i uzyskanym rezultatem dla pionowej liczby falowej [1]. W tym celu należy zamienić poziomą liczbę falową k_x na k_z, w relacji dla modelu VTI. Identyczny rezultat uzyska się dokonując zamiany liczb falowych w równaniu Christoffela. Mamy w tym przypadku do czynienia z tzw. limitowaną analogią modeli VTI i HTI, wykorzystaną m.in. przez A. Rügera [6] do określania charakterystyk kinematyczno-dynamicznych różnego typu fal.

Rozważmy inny przypadek modelu HTI; gdy pomiar w płaszczyźnie *x-z* dokonuje się w kierunku drugiej osi symetrii, tj. równolegle do laminacji (rysunek 2).



Rys. 2. Szkic modelu HTI. Pomiar dokonywany jest w płaszczyźnie *x-z* wzdłuż osi symetrii, równolegle do laminacji ośrodka

Wówczas macierz modułów sprężystości $D^{\varphi=0^o,\,\theta=90^o}$ dla kąta rotacji $\varphi = 0^o$ i kąta upadu laminowanego ośrodka – θ (równego 90^o) przybierze postać:

$$D^{\phi=0^o,\theta=90^o} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{13} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

W tym przypadku, podobnie jak i w poprzednim ($\varphi = 90^o$ i $\theta = 90^o$), zignorujemy składową U_y oraz jej pochodne w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pomiarów *x-z*, a zatem posłużymy się relacjami (6a) i (6b) oraz związkiem (4), w którym macierz $D^{\varphi=90^o,\,\theta=90^o}$ należy zastąpić przez $D^{\varphi=0^o,\,\theta=90^o}$ – do konstrukcji równań falowych dla składowych U_x i U_z.

W ten sposób uzyskujemy równania ruchu dla obydwu składowych:

$$\begin{aligned} C_{11}U_{x,xx} + C_{66}U_{x,zz} + \left(C_{12}+C_{66}\right)U_{z,zx} &= \rho\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \\ C_{66}\left(U_{z,xx}+U_{x,zx}\right) + C_{12}U_{x,xz} + C_{11}U_{z,zz} &= \rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (18)$$

a po zastosowaniu transformacji Fouriera względem współrzędnych przestrzennych i czasu ($x \to k_x$, $z \to k_z$, $t \to \omega$) otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} C_{11}k_x^2 + C_{66}k_z^2 - \rho\omega^2 + \left(C_{12}+C_{66}\right)k_x k_z \\ \left(C_{12}+C_{66}\right)k_x k_z + C_{11}k_z^2 + C_{66}k_x^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} U_x \\ U_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

Z relacji (19), przy założeniu, że pomijamy falę poprzeczną przyjmując $C_{66} = 0$, uzyskujemy następującą relację dla pionowej składowej liczby falowej k_z:

$$k_z^2 = \frac{\rho^2\omega^4 - C_{11}\rho\omega^2 k_x^2}{C_{11}\rho\omega^2 + \left(C_{12}^2 - C_{11}^2\right)k_x^2} = S_{II}^2\omega^2 - k_x^2 \qquad (20)$$

W ostatniej relacji skorzystano ze związku $C_{11} = C_{12}$ dla $C_{66} = 0$ i uzyskano ogólnie znaną formułę dyspersyjną dla ośrodka izotropowego, o prędkości wyznaczonej przez parametr $C_{11} = \rho \cdot V_{II}^2 = \rho \cdot S_{II}^{-2}$.

Tak więc dla modelu horyzontalnie poprzecznej izotropii (HTI) mamy dwie różne liczby falowe. Gdy pomiar dokonywany jest wzdłuż osi symetrii prostopadłej do laminacji obowiązuje relacja (15), natomiast gdy pomiar wykonywany jest wzdłuż osi symetrii równoległej do laminacji posługujemy się konwencjonalną liczbą falową – pionową, podobną jak w ośrodkach izotropowych. W ten sposób zdefiniowane pionowe liczby falowe stanowią kluczowe elementy operatora ekstrapolacji w MG(F-K) migracji w dziedzinie liczb falowych i częstotliwości oraz w dziedzinie czasoprzestrzeni. Właściwości tej metody w odniesieniu do izotropowego ośrodka zostały kilkakrotnie przedstawione w publikacjach [2, 3]. Istota metody polega na dualnym działaniu operatorów.

W pierwszym etapie następuje przemieszczanie pola falowego $U(k_x, z_j, \omega)$ z poziomu z_j na poziom $z_j + \Delta z$ za pośrednictwem eksponencjalnego operatora w ośrodku jednorodnym o grubości warstwy Δz, według relacji

$$U'\left(k_x, z_j + \Delta z, \omega\right) = e^{-ik_{z_o}\Delta z}U\left(k_x, z_j, \omega\right) \qquad (21)$$

W drugim etapie następuje korekta pola falowego $U(x, z_j + \Delta z, \omega)$ – transformaty Fouriera ($k_x \to x$) pola $U(x, z_j + \Delta z, \omega)$ za pośrednictwem przestrzennego filtra $F_j(x,\omega) = \left[1 - i/2\,\Delta z M_j(x)\right]^{-1}$, gdzie $M_j(x) = \int k_{z_o}^{-1}\left(k_{z_o}^2 - k_z^2\right)e^{ik_x x}dk_x$ – będącego sumą potęgowego szeregu Neumanna.

Ostateczny rezultat ekstrapolacji pola falowego jest następujący:

$$U_{z_j+\Delta_z} = F_j(x,\omega)U'(x,z_j+\Delta z,\omega) \qquad (22)$$

Korekta pozycjonuje pole falowe w funkcji współrzędnych przestrzennych, uwzględniając różnice pomiędzy parametrami ośrodka jednorodnego i ośrodka niejednorodnego w funkcji współrzędnych lateralnych. W przypadku migracji przed sumowaniem pola, algorytm ekstrapolacji będzie iloczynem funkcji korygujących F – odniesionych do źródeł i odbiorników, natomiast dla opcji zero-offsetowej powolność S_H należy pomnożyć przez 2 (relacja (15)). Sposób postępowania został szczegółowo omówiony w artykule [5] dotyczącym modelu VTI anizotropii.

Artykuł nadesłano do Redakcji 14.10.2009 r. Przyjęto do druku 29.10.2009 r.

Recenzent: dr Anna Półchłopek

Literatura

[1] Han Q., Wu R.S.: *A one-way dual domain propagator for scalar qP waves in VTI medium*. Geophysics, vol. D-9-17, 2005.
[2] Kostecki A., Półchłopek A.: *Migracja sejsmiczna przed sumowaniem pola falowego w ośrodku lateralnych niejednorodności prędkościowych*. Prace Instytutu Górnictwa Naftowego i Gazownictwa Nr 94, 1998.
[3] Kostecki A., Półchłopek A.: *Stable depth extrapolation of seismic wavefields by Neumann series*. Geophysics, 63, 2063-2071, 1998.
[4] Kostecki A.: *The algorithm of migration MG(F-K) in monoclinal anisotropic medium (model TTI)*. Nafta-Gaz nr 1, 2010.
[5] Kostecki A.: *Algorytmy głębokościowej migracji w anizotropowym ośrodku VTI*. Nafta-Gaz Nr 11, 661-667, 2007.
[6] Rüger A.: *Reflection coefficients and azimuthal AVO analysis in anisotropic media*. Society of exploration geophysicists, USA 2002.
[7] Shoenberg M.A.: *Seismic characterization of reservoirs containing multiple fracture sets*. Geophysical Prospecting, vol. 57, no 2, pp. 169-186, 2009.
[8] Thomsen L.: *Weak elastic anisotropy*. Geophysics, vol. 51, 1954-1966, 1986.
[9] Zhu I., Dorman I.: *Two-dimensional, three-component wave propagation in a transversely isotropic medium with arbitrary orientation – finite – element modeling*. Geophysics, vol. 65, no 3, pp. 934-942, 2000.

Prof. dr hab. inż. Andrzej KOSTECKI – geofizyk. Główny przedmiot zainteresowań – propagacja fal elektromagnetycznych i sejsmicznych, odwzorowanie geologicznych struktur wgłębnych z zastosowaniem migracji sejsmicznej, analiza prędkości migracyjnych, anizotropia sejsmiczna. Autor 130 publikacji.

OBRONA PRACY DOKTORSKIEJ

W dniu 21 grudnia 2009 roku, w Instytucie Nauk Geologicznych Państwowej Akademii Nauk, odbyła się publiczna rozprawa mgr Sylwii Kowalskiej – asystenta w Zakładzie Geofizyki Wiertniczej Instytutu Nafty i Gazu.

Temat rozprawy doktorskiej:

GRANICA DIAGENEZA/ANCHIMETAMORFIZM W SKAŁACH NAJWYŻSZEGO PROTEROZOIKU I KAMBRU ZE WSCHODNIEJ CZĘŚCI BLOKU MAŁOPOLSKIEGO WYZNACZONA NA PODSTAWIE BADAŃ MINERAŁÓW ILASTYCH

PROMOTOR:	prof. dr hab. Jan Środoń	ING PAN
RECENZENCI:	prof. dr hab. Andrzej Wiewióra	ING PAN
	prof. dr hab. Jerzy Żaba	ING UŚ